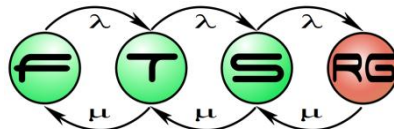


Kísérlettervezés alapfogalmak

Rendszermodellezés



Kísérlettervezés

- Cél: a modell paraméterezése a valóság alapján
 - Vagy absztrakt modell a konkrét modell alapján
- Információt **kísérletek** révén szerzünk
 - Pontosán mit szeretnénk tudni?
 - Ehhez milyen megfigyelést, hányszor kell elvégezni?
 - A kapott eredményekből mire lehet következtetni?
- (statisztikai) **kísérlettervezés** (Design of Experiment, DOE)
 - hatékony eljárás a kísérletek tervezésére és elemzésére
 - valós és objektív konklúziók levonásához
- Kísérletterv: még a kísérlet elvégzése előtt

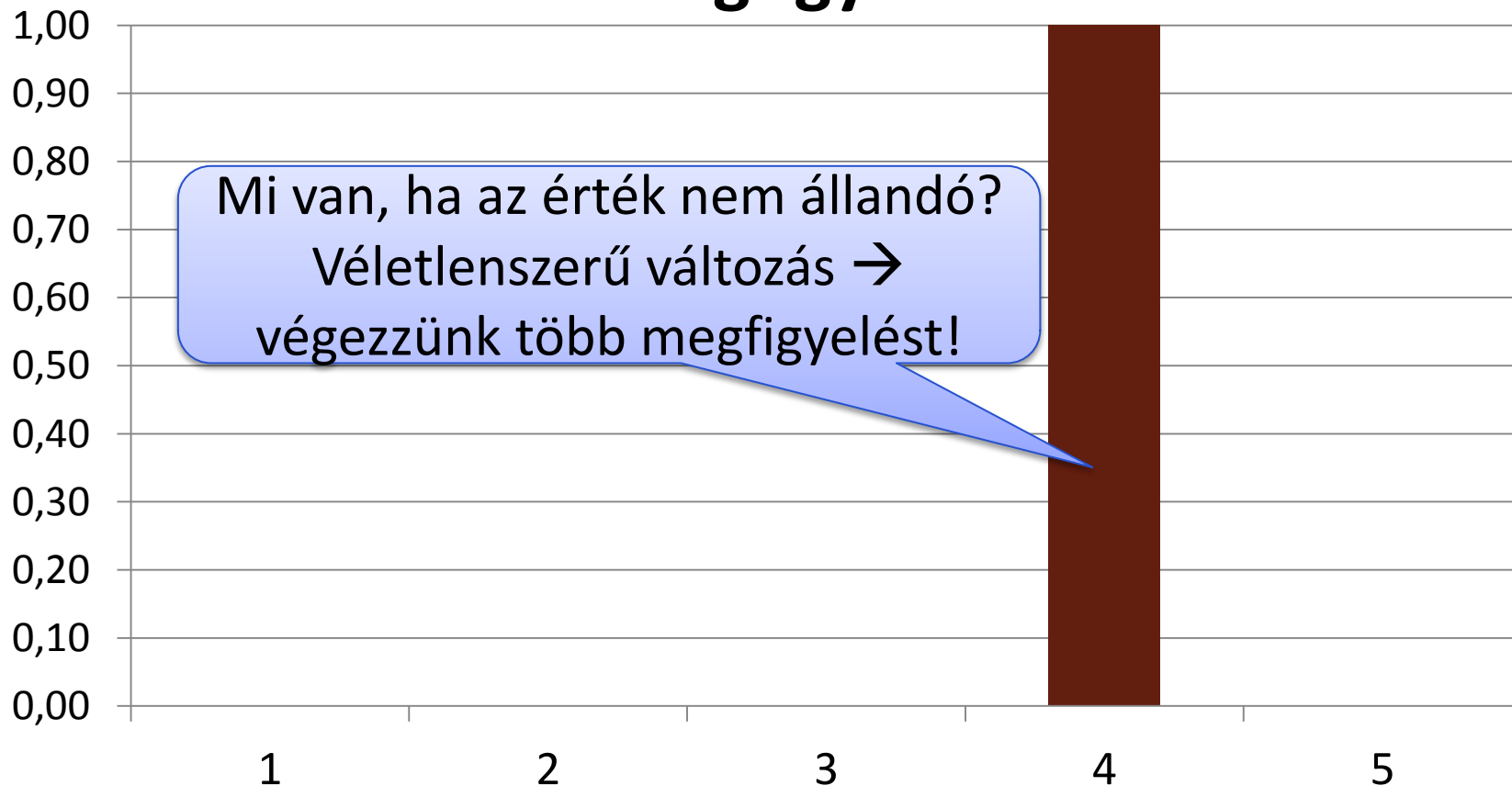
Kísérlettervezés

- Mire jó?
 - Alternatívák közötti választás
 - Érzékeny paraméterek, kulcsfaktorok
 - Megfelelő célérték, változékonyság csökkentése
 - Robosztussá tétel
- Fontos:
 - Világos cél, egyértelmű eredmények
 - Kis méret, alacsony költség
 - Valós viszonyok

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

1 megfigyelés

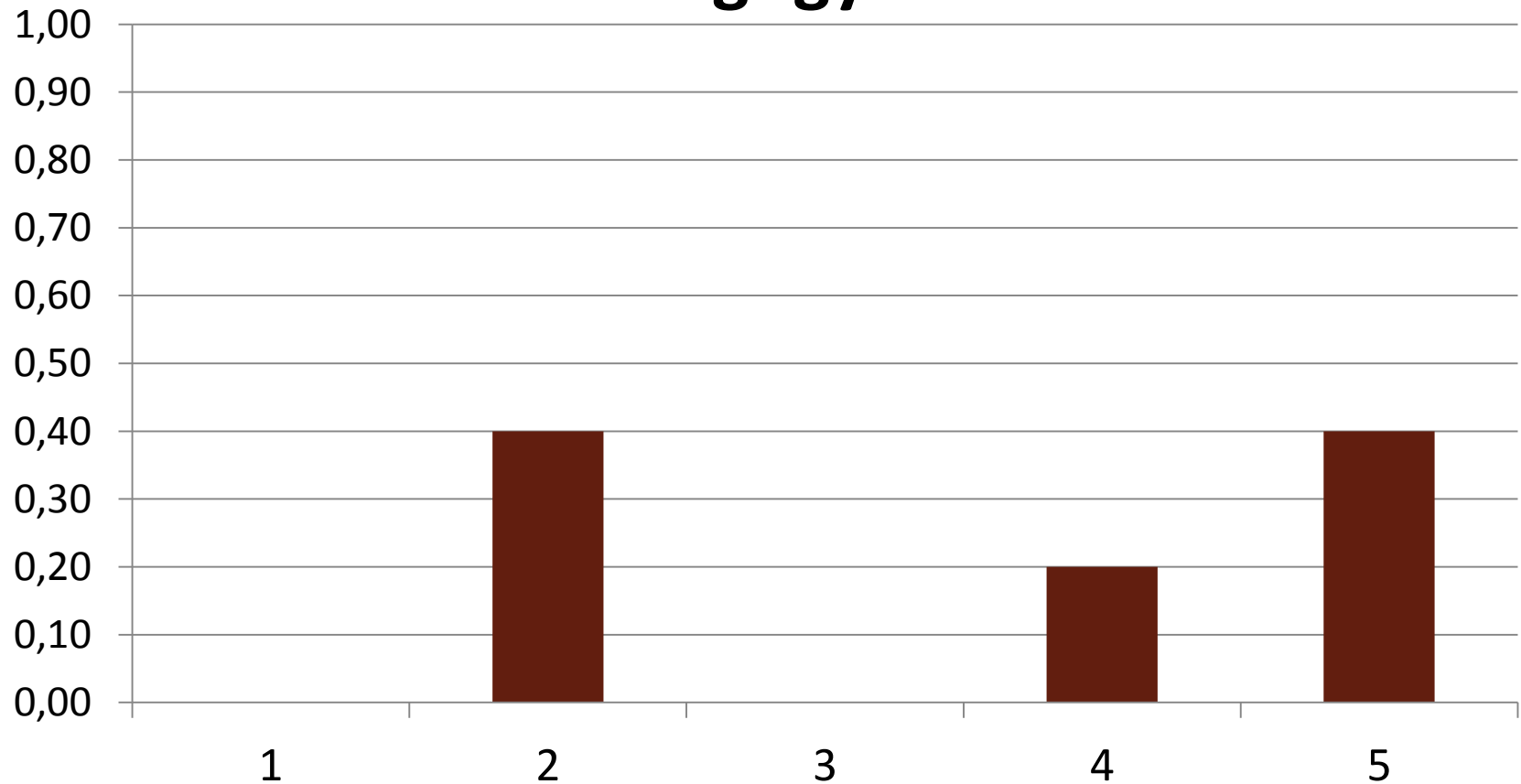


Mért érték: 4

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

5 megfigyelés

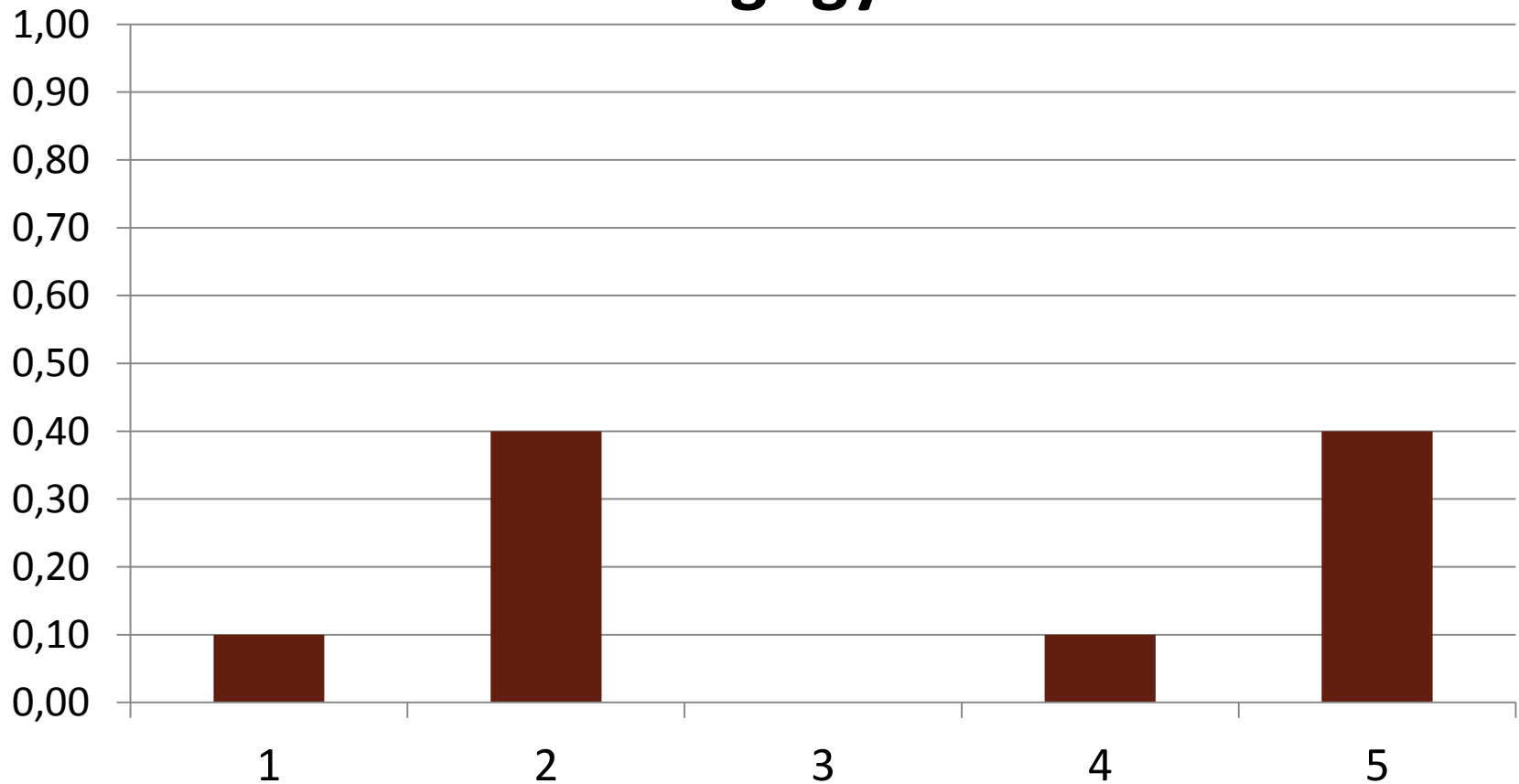


Számított átlag: 3,6

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

10 megfigyelés

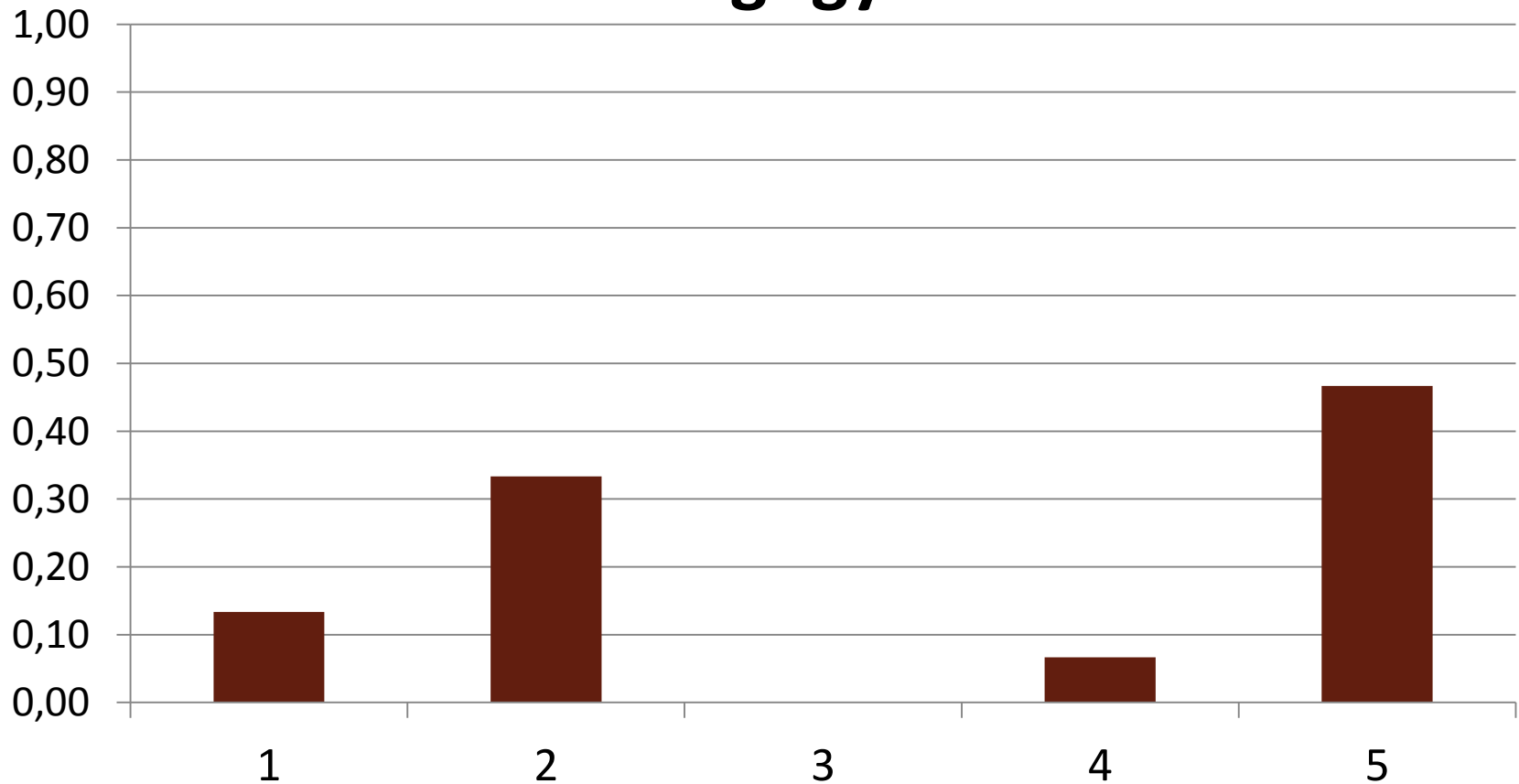


Számított átlag: 3,3

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

15 megfigyelés

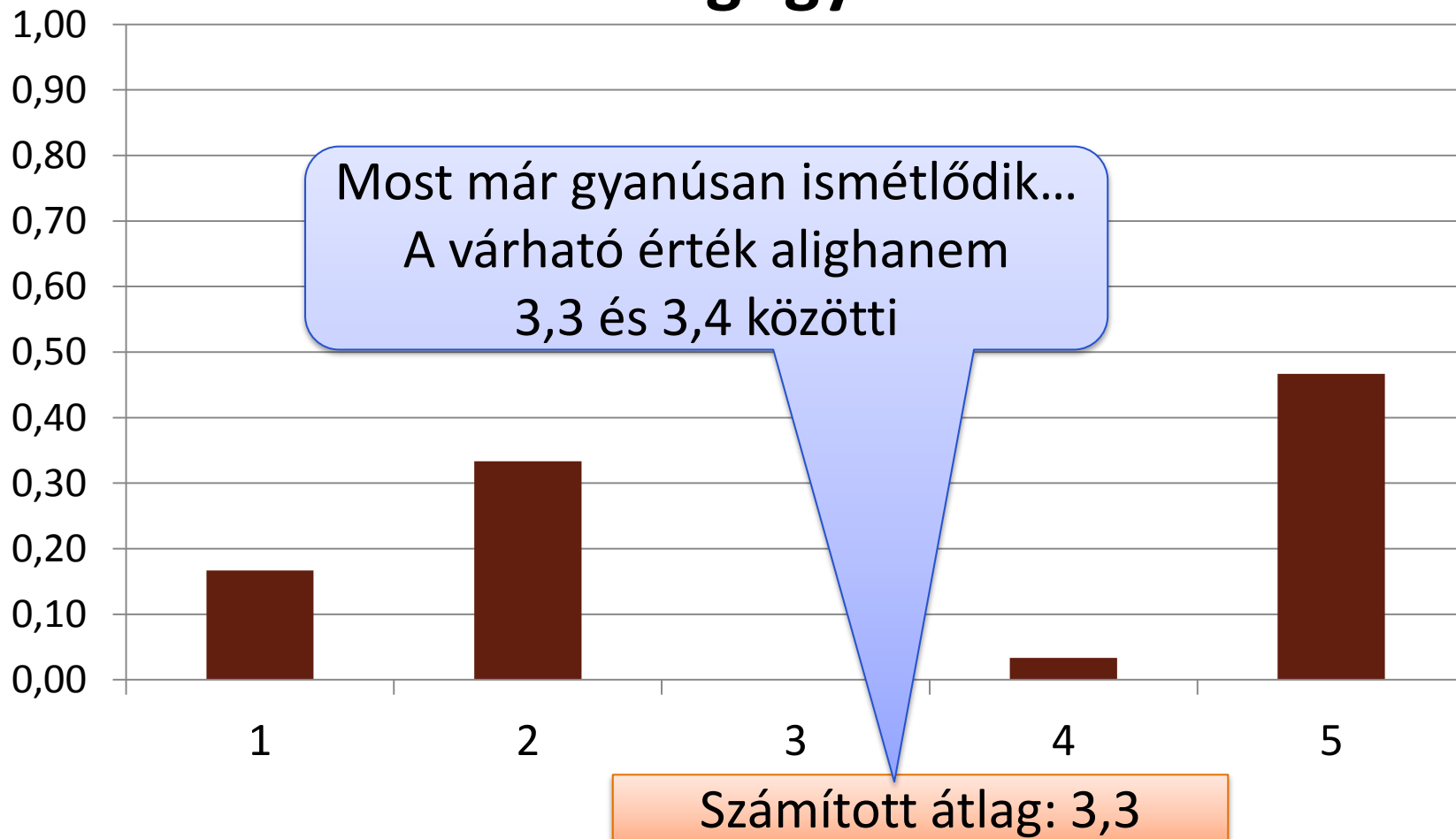


Számított átlag: 3,4

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

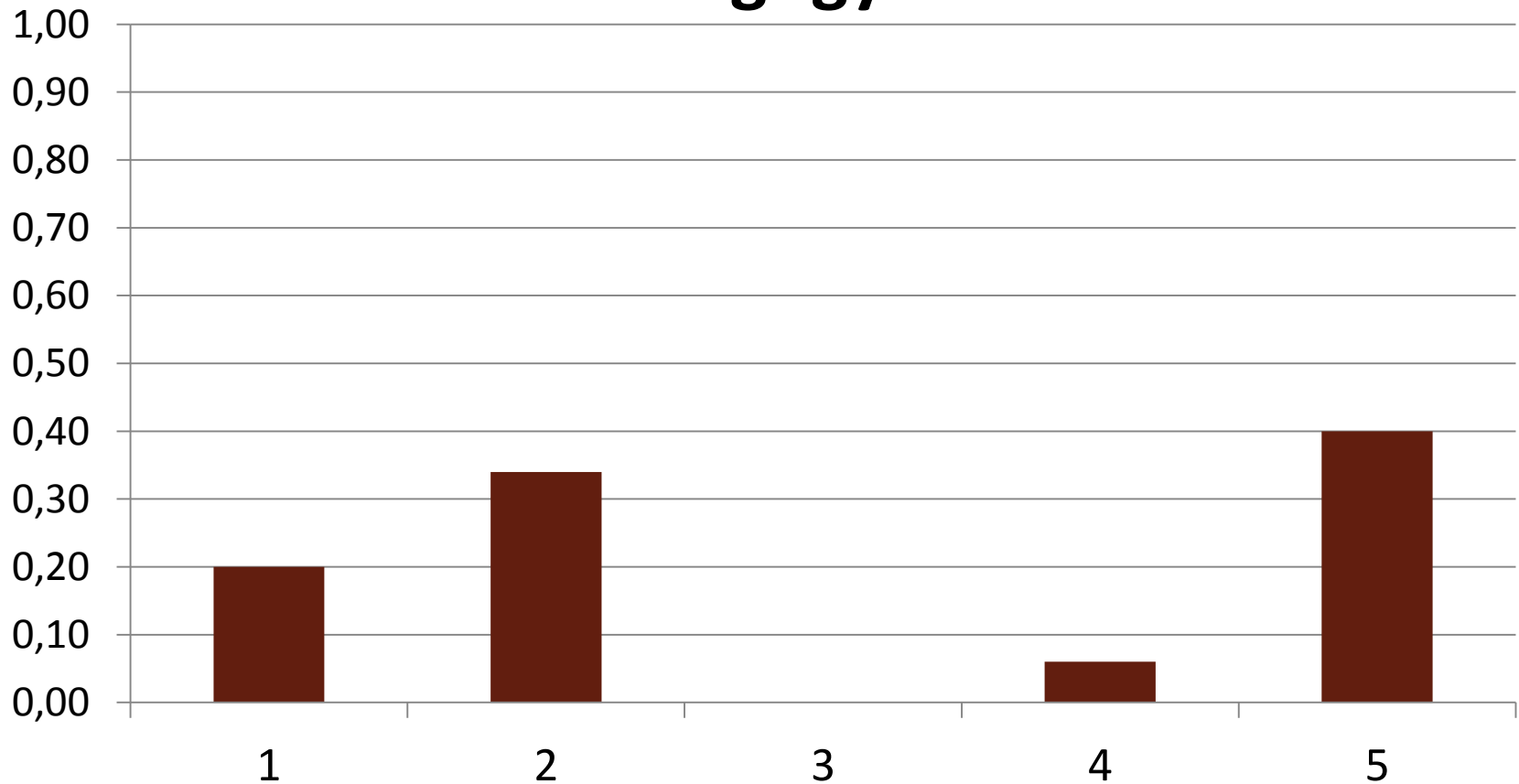
30 megfigyelés



Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

50 megfigyelés

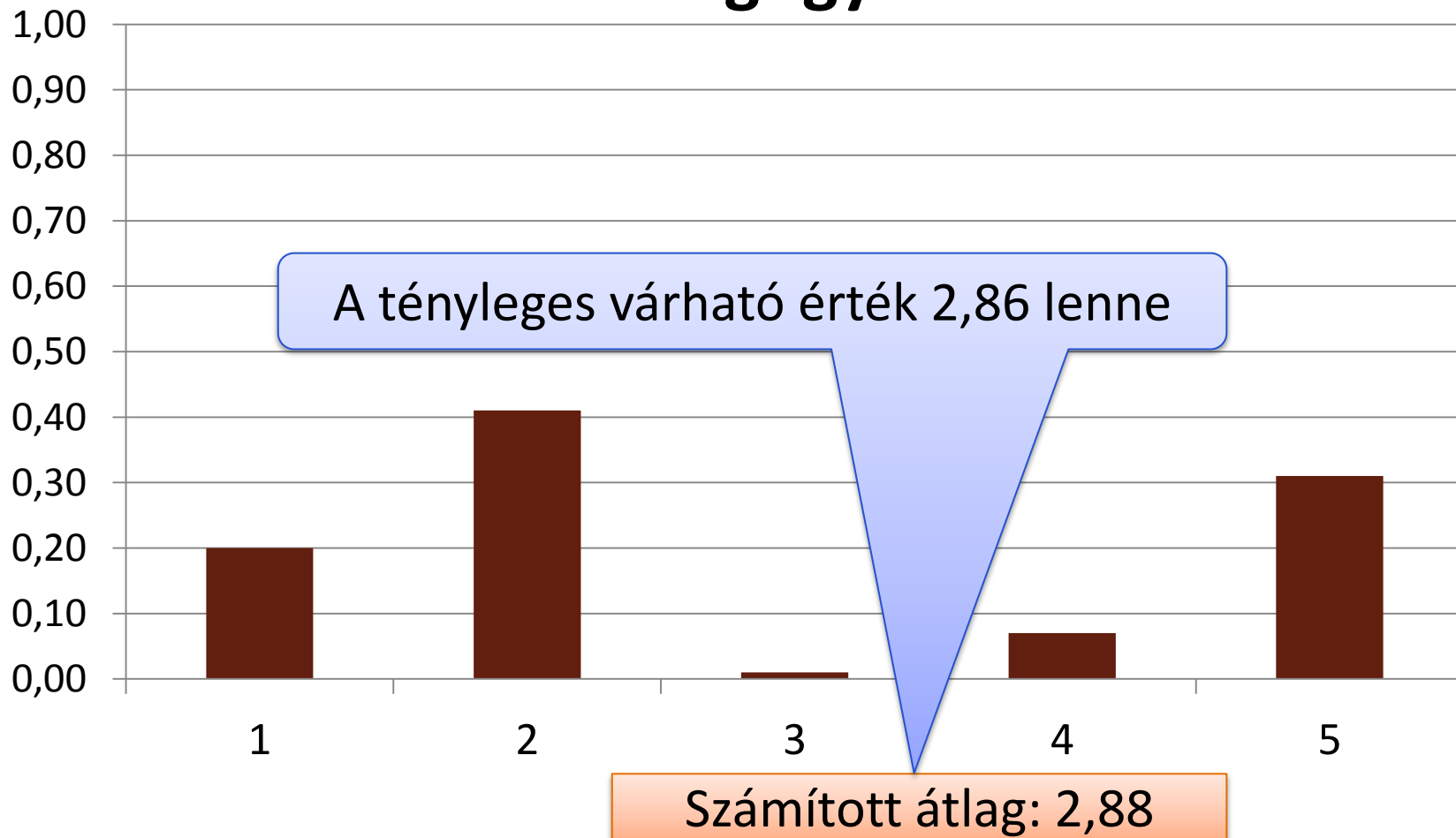


Számított átlag: 3,12

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)

100 megfigyelés



Ismétlés: tapasztalati átlag, szórás

- Valószínűségi változó: \mathbf{X} (vizsgálandó jelenség)
 - Várható érték: $m = E(\mathbf{X})$ (átlagos viselkedés)
 - Szórás: $d = \sqrt{E(\mathbf{X} - m)^2}$ (eltérések mértéke)
- Mintavétel: x_1, x_2, \dots, x_t (mérések, megfigyelések)
 - Tapasztalati átlag: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_t}{t}$
 - Szórásra NEM JÓ: $\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_t - \bar{x})^2}{t}}$
 - Korrigált tapasztalati szórás: $\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_t - \bar{x})^2}{t-1}}$

Ismétlés: tapasztalati átlag, szórás

■ Görgetett átlagszámítás

○ Tapasztalati átlag t megfigyelésből: $\bar{x}_t = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t}$

○ Tapasztalati átlag t+1 megfigyelésből, \bar{x}_t alapján:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1} &= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t + X_{t+1}}{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t+1} + \frac{X_{t+1}}{t+1} = \\ &= \frac{t}{t+1} \times \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t} + \frac{X_{t+1}}{t+1} = \frac{t}{t+1} \times \bar{x}_t + \frac{X_{t+1}}{t+1}\end{aligned}$$

egy számot elég megjegyezni

■ Probléma

○ Tapasztalati átlag \neq várható érték

- Tapasztalati szórás \neq szórás

○ Mintavétel eredménye x_i valószínűségi változó \rightarrow
a tapasztalati átlag is valószínűségi változó lesz!

Becslés tapasztalati átlaggal

- Módszer: számtani átlag képzése
 - Ismételt megfigyelések
 - Egymástól függetlenül
 - Azonos feltételek mellett
- Kérdések
 - Hány megfigyelést kell végezni?
 - A tapasztalati átlag mennyire jellemzi a valódi várható értéket?
- Először tisztázandó:
 - *Tapasztalati átlag mint valószínűségi változó eloszlása*

Tapasztalati átlag eloszlása

- Kísérlet = megfigyelések sorozata
- Megfigyelések sorozatának **tapasztalati átlaga**:
 - Egy jellemzőt t db. független megfigyeléssel mérve,
 - majd a mért értékeket átlagolva kapott eredmény
- **Centrális határeloszlás tételéből** következik:
 - Tetszőleges eloszlású jellemző
 - (de legyen *véges* m várható értékű és d szórású)
 - tapasztalati átlaga $t \rightarrow \infty$ esetén közelítőleg
 - **normális eloszlású**,
 - $\mu = m$ várható értékkel és $\sigma = d/\sqrt{t}$ szórással

Tapasztalati átlag eloszlása

- Kísérlet = megfigyelések sorozata
- Megfigyelések sorozatának **tapasztalati átlaga**:
 - Egy jellemzőt t db. független megfigyeléssel mérve,
Ökölszabály:
ismert szórásnál $t > 30$,
ismertetlen szórásnál $t > 100$
után kezd elfogadható lenni a közelítés
 - (de legyen *véges* m várható értékű és d szórású)
 - tapasztalati átlaga $t \rightarrow \infty$ esetén közelítőleg
 - **normális eloszlású**,
 - $\mu = m$ várható értékkel és $\sigma = d/\sqrt{t}$ szórással

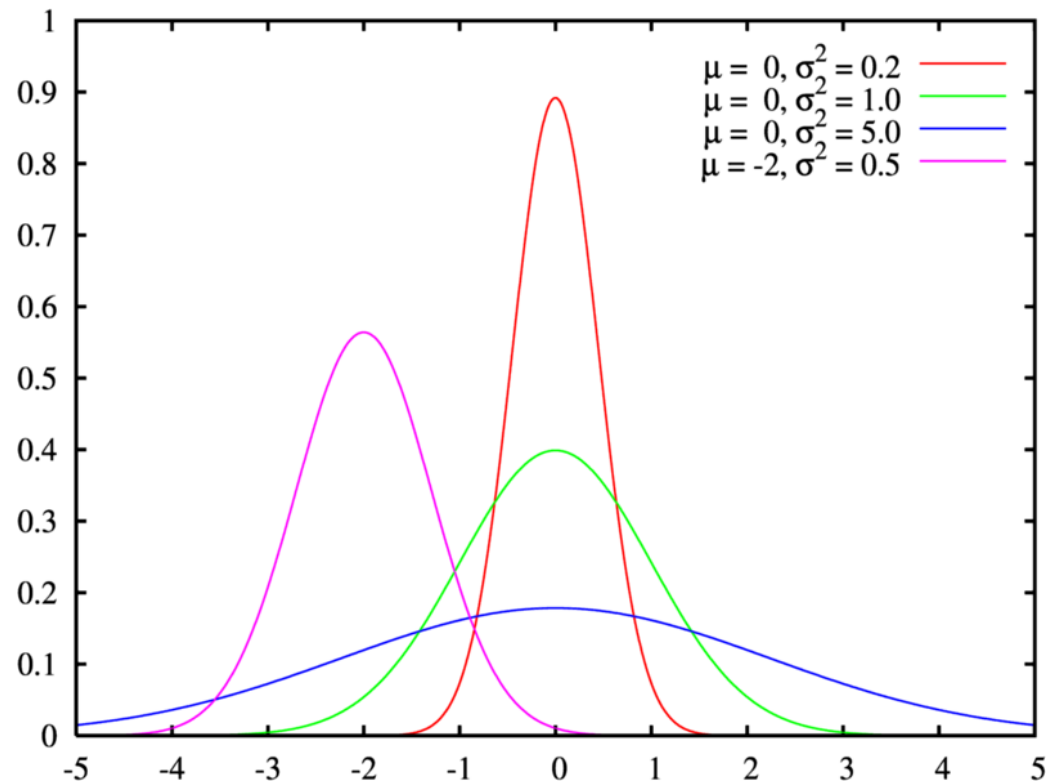
A normális (Gauss) eloszlás

- Valószínűsűrűség-függvénye: (nem kérdezzük)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

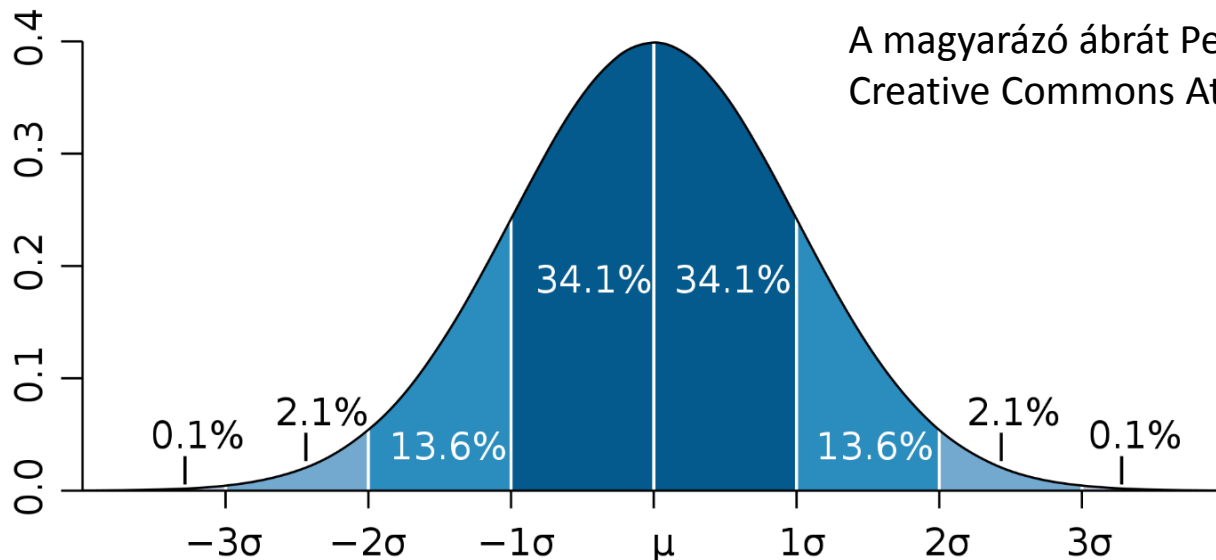
- Paraméterek

- Várható értéke μ
 - $\rightarrow m$ a mi esetünkben
- Szórása σ
 - $\rightarrow d/\sqrt{t}$ esetünkben



A normális (Gauss) eloszlás

- A várható érték körül koncentrálódnak



A magyarázó ábrát Petter Strandmark tette közzé
Creative Commons Attribution 2.5 Generic licenc alatt

- A normális eloszlású változó...
 - az esetek **68%**-ában legfeljebb **1σ** messze kerül μ -től
 - az esetek **95%**-ában legfeljebb **2σ** messze kerül μ -től
 - az esetek **99,7%**-ában legfeljebb **3σ** messze kerül μ -től
 - ...

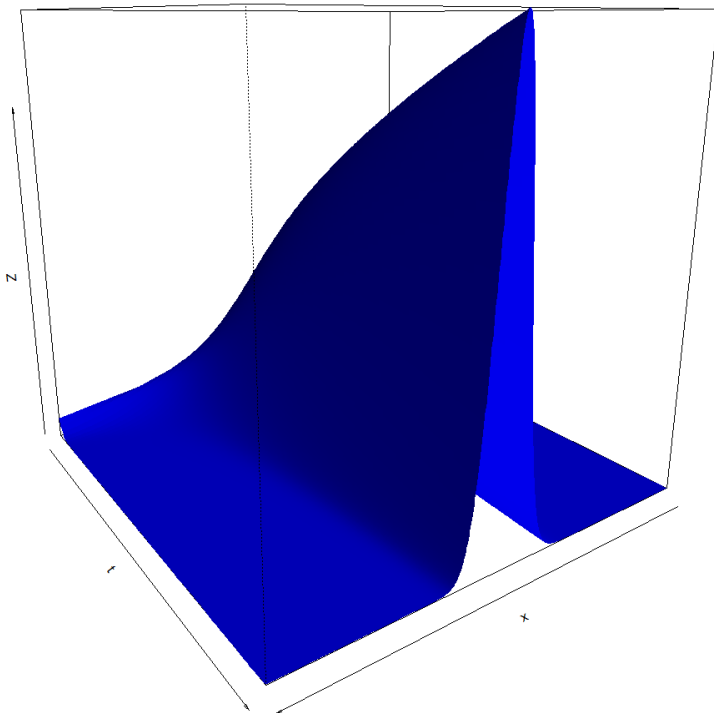
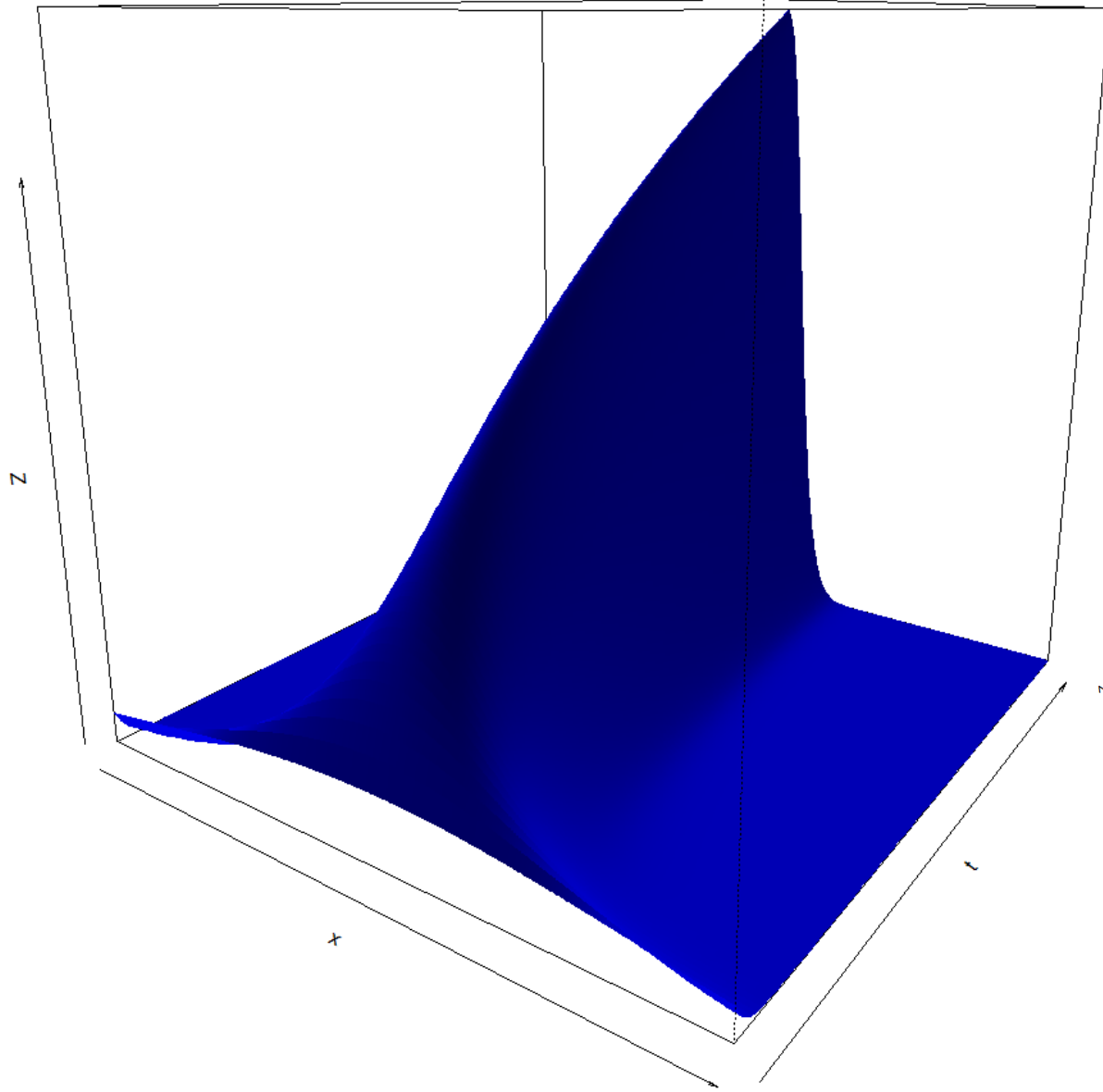
Konfidenciaintervallumok

- Ha tehát a tetszőleges eloszlású, d szórású vizsgált jellemzőről t db. (>30) megfigyelést végzünk
- A tapasztalati átlagáról...
 - **68%** biztonsággal kijelenthető, hogy legfeljebb d/\sqrt{t} pontatlansággal becsli m értékét
 - **95%** biztonsággal $2d/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
 - **99.7%** biztonsággal $3d/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
- És t növelésével gyökösen szűkül az intervallum

Konfidenciaintervallumok

- Ha tehát a tetszőleges eloszlású, d szórású vizsgált jellemzőről t db. (>30) megfigyelést végzünk
- A tapasztalati átlagáról...
 - **68%** biztonsággal kijelenthető, hogy a legvalószínűbb értéket a vizsgált jellemző **Konfidenciaszint** **Konfidenciaintervallum sugara (félszélessége)** d/\sqrt{t} sugarú intervallumba esik
 - **95%** biztonsággal $2d/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
 - **99.7%** biztonsággal $3d/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
- És t növelésével gyökösen szűkül az intervallum

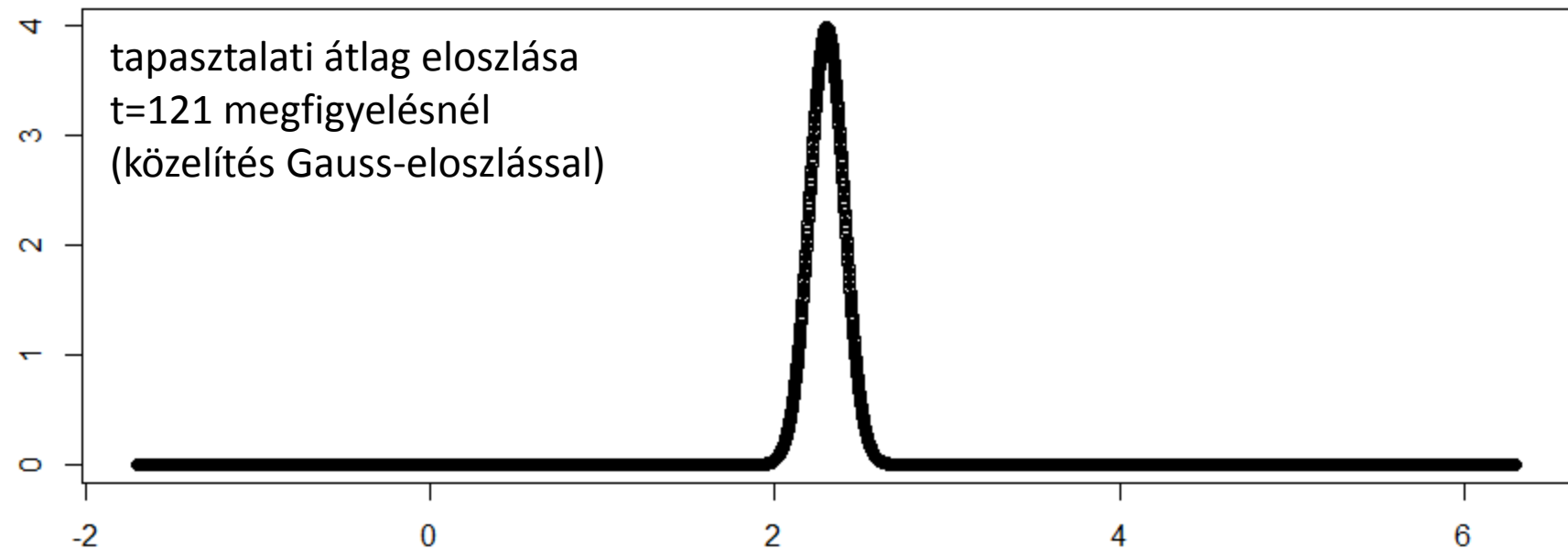
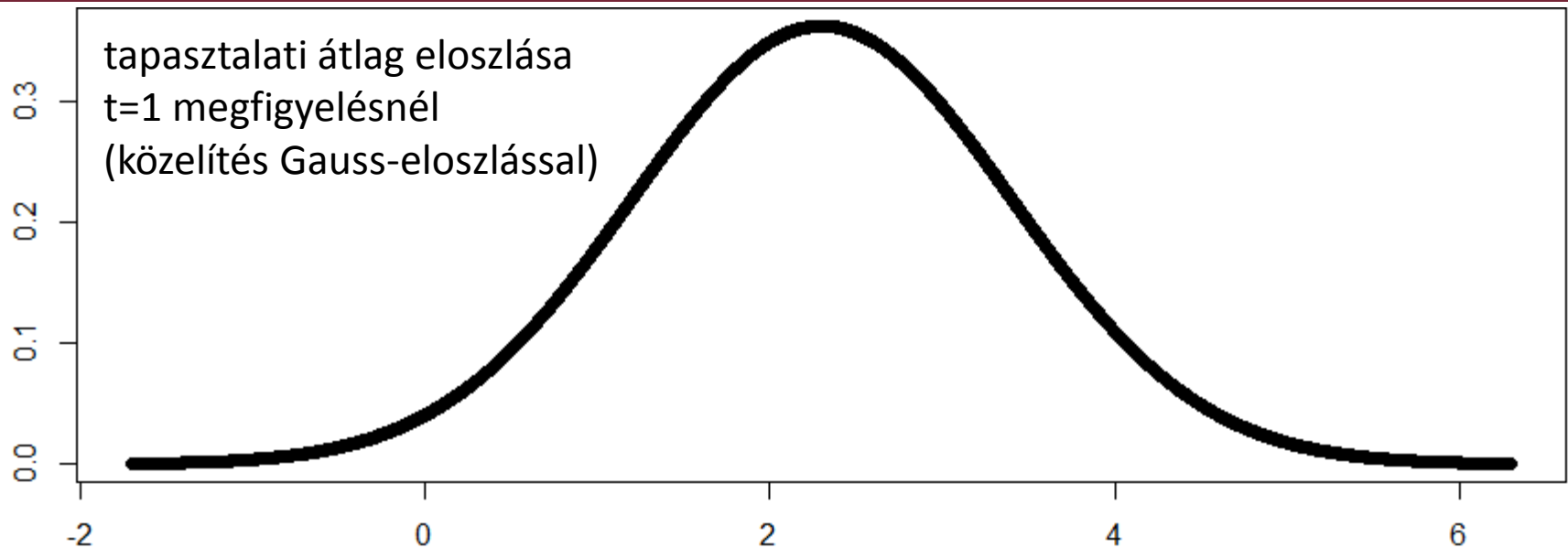
Megfigyelésszám növelése



Kísérlettervezés példa

- A várható értékre 30 megfigyelés
 - Tapasztalati átlag: 2,3 s (jó-e ez? kell még mérni?)
 - Tapasztalati szórás: $d = 1,1$ s
- Cél
 - 99.7%-os konfidenciaintervallum 0,6 s széles legyen
- Kísérlettervezés
 - Elvárt sugár (félszélesség) = $3\sigma = \frac{3d}{\sqrt{t}} < 0,3$ s
 - (ez a σ az átlag szórása, nem az eredeti mért jellemzőé!)
 - Ezért $t = 121$ megfigyelés kell legalább

Kísérlettervezés példa



Kísérlettervezés példa

- A várható értékre 30 megfigyelés
 - Tapasztalati átlag: 2,3 s (jó-e ez? kell még mérni?)
 - Tapasztalati szórás: $d = 1,1$ s
- Cél
 - 99.7%-os konfidenciaintervallum 0,6 s széles legyen
- Kísérlettervezés
 - Elvárt sugár (félszélesség) = $3\sigma = \frac{3d}{\sqrt{t}} < 0,3$ s
 - (ez a σ az átlag szórása, nem az eredeti mért jellemzőé!)
 - Ezért $t = 121$ megfigyelés kell legalább
- Hol a csalás?

Korrekción

- Többnyire a tényleges eloszlás paramétereit *a priori* ismeretlenek (különben minek mérnénk?)
- Így nem használható fel a tényleges ***d*** szórás
- Csak a tapasztalati szórás használható → Gauss/normális helyett Student t-eloszlás
 - (más konfidenciaintervallumok)
- $t \rightarrow \infty$ esetén Student \rightarrow normális
- Ökölszabály: $t > 100$ esetén használható a Gauss